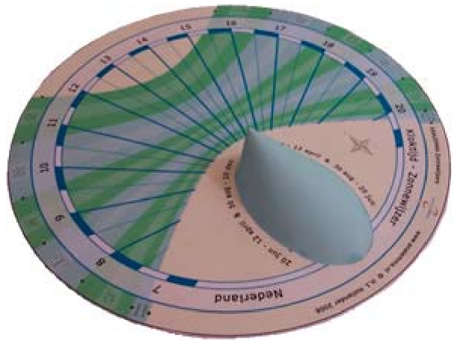
A N A L E M M A

<u>Middelbare tijd zonnewijzer met een kegelvormige schaduwwerper</u>
De wiskundige achtergrond
Amsterdam, 26 juli 2006
Hendrik Hollander



<u>Het principe van de middelbare tijd zonnewijzer met kegelvormige schaduwwerper</u>
Op de zonnewijzer zijn uurlijnen en datumlijnen aanwezig. Deze lijnen zien er vergelijkbaar uit als op een "gewone" poolstijlzonnewijzer. Op de zonnewijzer is een kegel aanwezig die een schaduw werpt. De centrale as van deze kegel staat parallel aan de aardas. De schaduw van de linker- en rechterkant van de kegel zijn apart zichtbaar. Op de zonnewijzer is voor elke datum aangegeven of de linker- of rechter schaduw van de kegel gebruikt moet worden.

Kijk naar de datumlijn van vandaag en kijk naar de schaduw van de juiste kant van de kegel. Lees de middelbare tijd af op deze datumlijn.

Hieronder geef ik de wiskundige achtergrond van deze zonnewijzer waarop de middelbare (of kloktijd) afgelezen wordt

<u>De relatie tussen de lengte van de zon, de declinatie van de zon en de datumlijnen op de zonnewijzer</u>
Zoals gebruikelijk voor zonnewijzers gebruiken we een veelvoud van 30 graden (of beter nog: een veelvoud van 10 graden) van de lengte van de zon (λ) om de data aan te geven op de zonnewijzer. De seizoenen worden gekenmerkt door $\lambda=0^\circ$ voor de lente, $\lambda=90^\circ$ voor de zomer, $\lambda=180^\circ$ voor de herfst en $\lambda=270^\circ$ voor de winter. Vaak worden de lijnen waarvan λ een veelvoud van 30˚ is aangegeven met de tekens van de dierenriem.

In het algemeen wordt elke declinatie van de zon bereikt door 2 waardes van λ. Eénmaal door een λ in de periode tussen de zomerwende en de winterwende ($\lambda_{z\text{-}w}$).en éémaal door een λ in de periode van de winterwende naar de zomerwende ($\lambda_{w\text{-}z}$). Zo is de herfstlijn en de lentelijn op een zonnewijzer bijvoorbeeld dezelfde lijn (declinatie van de zon = 0˚) en wordt bereikt door $\lambda_{w\text{-}z} = 0^\circ$ and $\lambda_{z\text{-}w} = 180^\circ$.

Wanneer $\lambda_{w\text{-}z}$ en $\lambda_{z\text{-}w}$ dezelfde zondeclinatie hebben voldoen zij aan de volgende relatie:

$$\lambda_{w-z} = 180^\circ - \lambda_{z-w} \qquad met \quad \lambda_{z-w} \in [90^\circ, 270^\circ]$$

Merk op dat $\lambda_{w\text{-}z}$ and $\lambda_{z\text{-}w}$ die aan de bovenstaande vergelijking voldoen ook dezelfde datumlijn op een zonnewijzer veroorzaken. We gaan nu een middelbare (of kloktijd) zonnewijzer bouwen met dit type datumlijnen.

ANALEMMA zonnewijzers
De Breekstraat 35 | 1024 LJ Amsterdam
T 020 637 43 83 | F 020 637 20 35 | info@analemma.nl
www.analemma.nl | K.v.K. 34171300 | ABN AMRO Bank 62.51.16.631

Het algoritme van de middelbare (of kloktijd) zonnewijzer

Voer de volgende stappen uit:

1. kies een combinatie van λ_{w-z} en λ_{z-w}
2. kies de schaduw van 1 zijde van de kegel voor λ_{w-z} en de schaduw van de ander zijde voor λ_{z-w} (welke schaduwzijde het beste gekozen kan worden leest u hieronder)
3. kies een moment in middelbare tijd of in kloktijd
4. bereken de schaduw voor dit moment voor beide λ's voor de juiste schaduwzijde van de kegel (formules worden hieronder gegeven)
5. bereken het snijpunt van deze 2 schaduwlijnen
6. markeer dit punt (dit punt is onderdeel van de uurlijn van het gekozen moment in stap 3 en is ook onderdeel van de datumlijn van λ_{w-z} en λ_{z-w} uit stap 1)
7. herhaal de stappen 1 t/m 6 voor verschillende waardes van λ_{w-z} en λ_{z-w} en voor verschillende momenten en verbindt de gevonden snijpunten tot uurlijnen en datumlijnen

opmerking aangaande stap 2.

Door λ_{w-z} en λ_{z-w} op de juiste wijze te koppelen aan de linker en rechter schaduw van de kegel zal de schaduw van de kegel altijd de datumlijn snijden. Hiervoor moet men de schaduw van de linkerkant van de kegel (met de zon in de rug) koppelen aan de periodes dat de zon voorloopt op de middelbare (of klok-) tijd

Berekening van de kegel

De centrale as van de kegel staat parallel aan de aardas. De kegel staat hierdoor schuin op het oppervlak van de zonnewijzer. De kegel kan uit een stukje papier geknipt worden.

We definiëren:
h : lengte van de centrale as van de kegel van de top tot het zonnewijzeroppervlak
γ : de halve tophoek van de kegel
φ : de hoek tussen de kegelas en het zonnewijzeroppervlak
(φ = 90 betekent dat de kegel haaks op het zonnewijzeroppervlak staat)
(voor horizontale zonnewijzers kan φ als de breedtegraad gezien worden)

In polaire coördinaten (r,θ) kan de kegel geplot worden met:

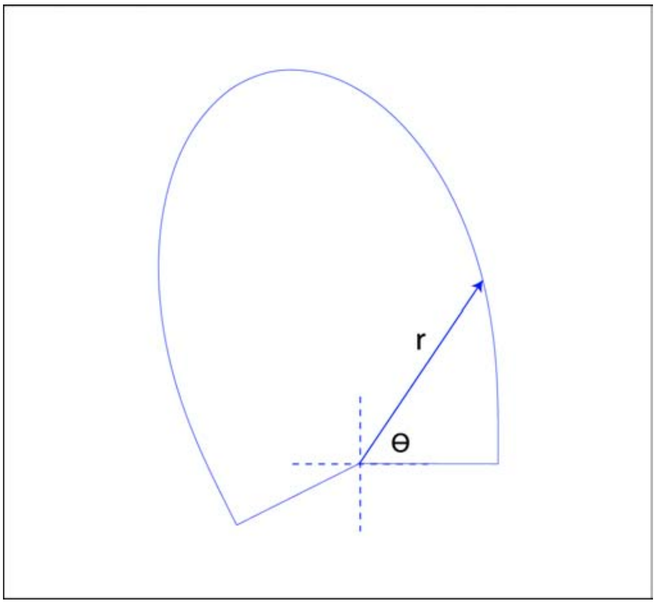
$$r = \frac{h}{\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\tan(90-\varphi)\cos(\frac{\theta}{\sin(\gamma)})}$$

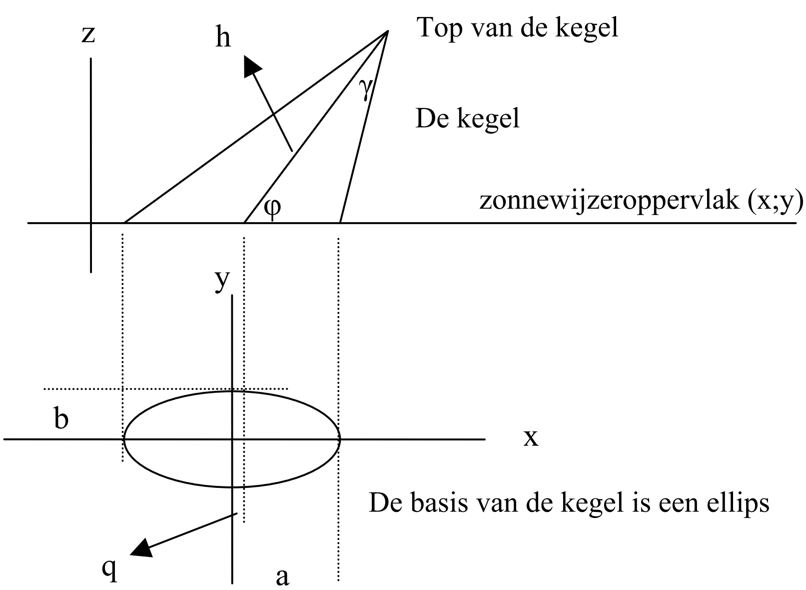
waarbij

$$\theta \in [0\ ,\ 2\pi\sin(\gamma)]$$

een voorbeeld van de uitgevouwen kegel zien we hieronder

ANALEMMA zonnewijzers
De Breekstraat 35 | 1024 LJ Amsterdam
T 020 637 43 83 | F 020 637 20 35 | info@analemma.nl
www.analemma.nl | K.v.K. 34171300 | ABN AMRO Bank 62.51.16.631





Op het zonnewijzeroppervlak tekenen we een ellips waar de kegel geplaatst wordt. Hiervoor definiëren we:

q : de afstand tussen het hart van de zonnewijzer (de plaats waar de kegelas het zonnewijzeroppervlak snijdt) en het centrum van de ellips.

de ellips zelf:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

aangetoond kan worden dat voor de top van de kegel geldt:

$$x_{apex} = h\cos(\varphi) + q$$

$$z_{apex} = h\sin(\varphi)$$

en verder:

$$a = \frac{h\sin(\gamma)}{2\sin(\varphi - \gamma)} + \frac{h\sin(\gamma)}{2\sin(\varphi + \gamma)}$$

$$q = a - \frac{h\sin(\gamma)}{2\sin(\varphi + \gamma)}$$

$$b = ha\tan(\gamma)\sqrt{\frac{1}{a^2 - q^2}}$$

De top van de kegel werpt een schaduw door een zonnestraal voor een bepaalde tijd en zondeclinatie. Dit schaduwpunt kan berekend worden met de formules voor een standaard punt-zonnewijzer.

We definiëren dit schaduwpunt als (P_1, P_2), en we merken op de dit punt onderdeel is van de (linker en rechter) schaduwlijn van de kegel. De schaduwlijn van de kegel zal ook raken aan de bovenstaande ellips. Definiëren we de schaduwlijn als

$$(y - P_2) = (x - P_1)r$$

dan kan aangetoond worden dat

$$r = \frac{-P_1P_2 \pm \sqrt{(a^2P_2^2 + b^2P_1^2 - a^2b^2)}}{(a^2 - P_1^2)}$$

In het algemeen zullen er 2 oplossingen zijn voor r, namelijk 1 voor de schaduwlijn van de linkerkant van de kegel en 1 voor de rechterkant. Om te bepalen welke oplossing van r geldt voor de schaduw van de linker- of rechterkant van de kegel kan het volgende criterium gebruikt worden:

ANALEMMA zonnewijzers
De Breekstraat 35 | 1024 LJ Amsterdam
T 020 637 43 83 | F 020 637 20 35 | info@analemma.nl
www.analemma.nl | K.v.K. 34171300 | ABN AMRO Bank 62.51.16.631

$$als\ sign(P_1) = sign(P_2) \Rightarrow de\ linker\ schaduwlijn\ heeft\ de\ kleinste\,|r|$$
$$als\ sign(P_1) = -sign(P_2) \Rightarrow de\ linker\ schaduwlijn\ heeft\ de\ grootste\,|r|$$

Het moet gecontroleerd worden dat (P_1, P_2) buiten de ellips ligt, dit kan met:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \geq 1$$

Bovenstaand ontwerp is door de North American Sundial Society (NASS) in 2006 bekroond met de Saywer Dailing Prize.

Graag bedank ik Fred Sawyer (president van de Noord Amerikaanse zonnewijzerkring) en Fer de Vries (secretaris van de Nederlandse zonnewijzerkring) voor hun steun en goede suggesties.